ГЛАДКИЕ САМОАФФИННЫЕ КРИВЫЕ.

Кравченко А. С.

Введение. В данной работе строится теория гладких (т.е. непрерывно дифференцируемых) самоаффинных кривых на плоскости. Некоторые классы самоаффинных кривых изучались в работах Astala [4], Bedford [5–6] и Falconer [7–8]. В литературе до сих пор рассматривался только случай нигде не дифференцируемых самоаффинных кривых. Так, в задаче [7, 11.4, p.159] предлагалось доказать, что функции с самоаффинными графиками, удовлетворяющие определённому условию, являются нигде не дифференцируемыми.

В параграфе 1 исследуется условие, когда полугруппа, порождённая заданным набором линейных операторов, действующих на плоскости, сжимает угол раствора заданного конуса. В параграфе 2 определяется класс самоаффинных кривых — ципперы и подкласс непрерывно дифференцируемых кривых — гладких ципперов. Основной результат — критерий гладкости ципперов в $\mathbb{R}^2$ — сформулирован в теореме 2.5. Параграф 3 посвящён применению критерия гладкости к конкретным примерам.

1. Наборы линейных операторов, сжимающие конус. Непустое множество $U \subset \mathbb{R}^m$ называется выпуклым конусом, если $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in U$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$ и $u_1, u_2 \in U$. *Конусной оболочкой* множества $V \subset \mathbb{R}^m$ называется множество

$$\operatorname{cone}(V) = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 : \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0, u_1, u_2 \in V\}.$$

Угол между ненулевыми векторами $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^m$ обозначается $u_1\hat{\ }u_2$. *Углом раствора* выпуклого конуса $U \subset \mathbb{R}^m$ называется число

$$\theta(U) = \sup\bigl\{u_1\hat{\ }u_2 : u_1, u_2 \in U \setminus \{0\}\bigr\}.$$

Выпуклый конус U в $\mathbb{R}^m$ называется острым, если он не содержит ни одной прямой (не обязательно проходящей через 0), что эквивалентно условию $\theta(U) < \pi$. На плоскости любой замкнутый выпуклый конус $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \neq \mathbb{R}^2$ является *планарным углом*, т.е. множеством, состоящим из двух лучей, исходящих из начала координат, называемых *сторонами конуса*, и множества точек, лежащих между ними.

Множество линейных операторов $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ обозначается $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$. Множество матриц размера $m \times m$ с элементами из заданного множества F обозначается $\mathrm{L}_m(F)$. Для любого множества $V \subset \mathbb{R}^m$ и оператора $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$ определено множество $LV = \{Lx : x \in V\}$, и аналогично для матрицы $A \in \mathrm{L}_m(\mathbb{R})$ определяется $AV = \{Ax : x \in V\}$. Для любого замкнутого выпуклого конуса $U \subset \mathbb{R}^m$ введём полугруппу линейных эндоморфизмов конуса U

$$\mathfrak{G}_m(U) = \{L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m) : LU \subset U\}.$$

Для любого $L \in \mathfrak{G}_m(U)$ обозначим

$$\mathrm{Nv}(L, U) = \#\{v \in U : ||v|| = 1, \exists \lambda > 0 : Lv = \lambda v\},$$

где символ „#“ обозначает число элементов множества.

Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 2$. Конечное множество $I = \{1, \dots, n\}$ будем называть алфавитом. Элементы декартова произведения $I^k = \prod_{j=1}^{k} I$ для $k \in \mathbb{N}$ будем называть *словами длины* k и записывать их как $i = i_1 i_2 \dots i_k$. Определим множество всех слов конечной длины $I^* = \cup_{k \in \mathbb{N}} I^k$. Множество слов бесконечной длины $I^\infty = \prod_{j=1}^{\infty} I$ называется *индексным пространством*. Слова, являющиеся периодическими последовательностями символов вида $w = ijjj \ldots \in I^\infty$, где $i, j \in I^*$, записываются как $w = i(j)$. Для любых $k \in \mathbb{N}$ и $i = i_1 i_2 \ldots \in I^\infty$ определяется операция *срезки* $i|_k = i_1 i_2 \dots i_k \in I^k$. Для конечного набора отображений $\{S_1, \dots, S_n\}$ некоторого метрического пространства X в себя и любого слова $i = i_1 \dots i_k \in I^k$ определим $S_i = S_{i_1} \circ \dots \circ S_{i_k}$, и аналогично для произвольной полугруппы, порождённой элементами $\{s_1, \dots, s_n\}$, определим $s_i = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$.

Сформулируем основной результат данного параграфа.

Теорема 1.1 *Пусть заданы непустой острый замкнутый выпуклый конус $U \subset \mathbb{R}^2$ и набор линейных операторов $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{G}_2(U)$, такой что $L_i \neq 0$ для всех $i \in I^*$. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) $\mathrm{Nv}(L_i L_j, U) = 1$ *для любых* $i, j \in I$.

(ii) Для любого $i \in I^\infty$ выполняется $\lim_{k\to\infty} \theta(L_{i|_k} U) = 0$.

Будем говорить, что набор линейных операторов $L_1, \dots L_n \in \mathfrak{G}_2(U)$ *сжимает конус* U, если он удовлетворяет условиям теоремы 1.1.

Для доказательства теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений и определений.

Для любого вектора a через a^{T} будем обозначать транспонированный вектор. На плоскости $\mathbb{R}^2$ будем рассматривать канонический базис $e_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$, $e_2 = (0, 1)^{\mathrm{T}}$ и норму $||x||_1 = |x_1| + |x_2|$ для $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$. Для векторов $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^2$ будем писать $u_1 \uparrow\uparrow u_2$, если векторы u_1 и u_2 *коллинеарны и одинаково направлены*, т.е. если существует $\lambda > 0$ такое, что $u_1 = \lambda u_2$.

Обозначим $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ и $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Введём функции $\varphi : \Omega \setminus \{0\} \to [0, 1]$, $\varphi(x) = x_2/||x||_1$ и $\psi : [0, 1] \to \Omega$, $\psi(t) = (1 - t, t)^{\mathrm{T}}$ для $t \in [0, 1]$. Таким образом, ψ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[e_1, e_2]$, и функция φ на отрезке $[e_1, e_2]$ является обратной к ψ.

Будем рассматривать группу невырожденных матриц размера 2×2 с неотрицательными коэффициентами $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$. Для каждой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ определим функцию $F_A : [0, 1] \to [0, 1]$,

$$F_A(t) = \varphi(A \cdot \psi(t)).$$

Введём следующие обозначения:

$$\Delta(A) = |F_A(1) - F_A(0)|;$$

$$\omega(A) = \min\{F_A(0), 1 - F_A(0), F_A(1), 1 - F_A(1)\};$$
$$\mathrm{Nv}(A) = \#\{v \in \Omega : \, ||v|| = 1 : \, \exists \lambda > 0 : \, Lv = \lambda v\};$$
$$\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) : \, \omega(A) = 0\};$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\Lambda(\lambda, \alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ для любых вещественных } \lambda, \alpha \geqslant 0;$$
$$\mathcal{A}_1 = \left\{ r \cdot D^t \cdot \Lambda(\lambda, \alpha) \cdot D^t : \, \lambda > 1, r > 0, \alpha \geqslant 0, t \in \{0, 1\} \right\}.$$

Заметим, что $\det D = -1$ и $D^2 = E$. Для любой треугольной матрицы $\Lambda = \Lambda(\lambda, \alpha)$, где $\lambda > 0$, $\alpha \geqslant 0$, имеем $\Lambda \in \mathcal{A}_0$ и

$$\Delta(\Lambda(\lambda, \alpha)) = |F_\Lambda(1) - F_\Lambda(0)| = \left| \frac{\lambda}{\alpha + \lambda} - 0 \right| = \frac{\lambda}{\alpha + \lambda}. \tag{1.1}$$

Для произвольных $c \in (0, +\infty)$ и $\tau_1, \tau_2 \in [0, 1]$ обозначим

$$Q(c, \tau_1, \tau_2) = \frac{c \cdot |\tau_1 - \tau_2|}{|1 - \tau_1 + c\tau_1| \cdot |1 - \tau_2 + c\tau_2|}. \tag{1.2}$$

Для любого замкнутого выпуклого острого конуса U с углом раствора $\theta(U) > 0$ можно выбрать линейно независимые векторы e'_1, e'_2 на сторонах конуса. Тогда каждый оператор $L \in \mathfrak{G}_2(U)$, $L \neq 0$ будет в базисе e'_1, e'_2 представляться некоторой ненулевой матрицей A с неотрицательными элементами, причём $\mathrm{Nv}(L, U) = \mathrm{Nv}(A)$. Из теоремы [2, Гл.XII, Теорема 3, стр.365], обобщающей теорему Фробениуса (см. [2, Гл.XII, стр.355]), следует, что любая ненулевая матрица с неотрицательными элементами имеет хотя бы один собственный вектор $v \in \Omega$. Таким образом, для любого невырожденного оператора $L \in \mathfrak{G}_2(U)$ справедливо неравенство

$$1 \leqslant \mathrm{Nv}(L, U) \leqslant 2. \tag{1.3}$$

Аналогично для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ имеем

$$1 \leqslant \mathrm{Nv}(A) \leqslant 2. \tag{1.4}$$

Предложение 1.2 *Справедливы следующие свойства:*

$$\psi \circ \varphi(x) = x/||x||_1 \text{ для всех } x \in \Omega \setminus \{0\} \tag{1.5}$$
$$\varphi(\lambda x) = \varphi(x) \text{ для всех } \lambda \neq 0, \; x \in \Omega \setminus \{0\} \tag{1.6}$$
$$F_E = \varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{[0,1]} \text{ — тождественное отображение на } [0, 1] \tag{1.7}$$
$$\Delta(A) = \operatorname{diam} F_A([0, 1]) \text{ для всех } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) \tag{1.8}$$
$$F_{AB} = F_A \circ F_B \text{ для всех } A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) \tag{1.9}$$
$$F_A(1) - F_A(0) = \frac{\det A}{||Ae_1||_1 \cdot ||Ae_2||_1} \text{ для всех } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) \tag{1.10}$$
$$\Delta(A) = \frac{|\det A|}{||Ae_1||_1 \cdot ||Ae_2||_1} \text{ для всех } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) \tag{1.11}$$
$$\Delta(A) = \Delta(AD) = \Delta(DA) = \Delta(DAD) \text{ для всех } A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+) \tag{1.12}$$

`Доказательство.` Свойства (1.5)—(1.8) следуют непосредственно из определений функций φ и ψ. Свойство (1.9) следует из тождества

$$F_{AB}(t) = \varphi(AB\psi(t)) = \varphi(A \cdot \frac{B\psi(t)}{||B\psi(t)||_1}) = \varphi(A\psi \circ \varphi(B\psi(t))) = F_A \circ F_B(t).$$

Для матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1,2} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ из условий $\det A \neq 0$ и $a_{ij} \geqslant 0$ следует, что $a_{11} + a_{21} \neq 0$ и $a_{12} + a_{22} \neq 0$, и поэтому

$$F_A(1) - F_A(0) = \frac{a_{22}}{a_{12} + a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{11} + a_{21}} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(a_{11} + a_{21}) \cdot (a_{12} + a_{22})},$$

что доказывает (1.10) и (1.11).

Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ и $i = 1, 2$ справедливы равенства $||Ae_i||_1 = ||DAe_i||_1$, $De_i = e_{3-i}$ и

$$\det A = -\det DA = -\det AD = \det DAD.$$

С учётом формулы (1.11) получаем (1.12). □

Предложение 1.3 *Если $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$, то функция $f(t) = \det A \cdot F_A(t)$ строго монотонно возрастает на $[0, 1]$.*

`Доказательство.` Обозначим $A = (a_{ij})$, $\delta_1 = a_{11} + a_{21}$ и $\delta_2 = a_{12} + a_{22}$. Из $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ следует $\delta_1, \delta_2 > 0$. Вычислим

$$F_A(t) = \frac{a_{21}(1-t) + a_{22}t}{a_{11}(1-t) + a_{12}t + a_{21}(1-t) + a_{22}t} = \frac{a_{21} + (a_{22} - a_{21})t}{\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t},$$

$$F'_A(t) = \frac{(a_{22} - a_{21})(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t) - (a_{21} + (a_{22} - a_{21})t)(\delta_2 - \delta_1)}{(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t)^2} =$$

$$= \frac{a_{22}\delta_1 - a_{21}\delta_2}{(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t)^2} = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t)^2} = \frac{\det A}{(\delta_1 + (\delta_2 - \delta_1)t)^2}.$$

Отсюда получаем, что $f'(t) = \det A \cdot F'_A(t) > 0$ для $t \in [0, 1]$. □

Предложение 1.4 *Для любых $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2 > 0$ справедливо неравенство*

$$\omega\big(\Lambda(\lambda_1, \alpha_1) \cdot D \cdot \Lambda(\lambda_2, \alpha_2)\big) > 0.$$

`Доказательство.` Вычислим произведение $A = \Lambda(\lambda_1, \alpha_1) \cdot D \cdot \Lambda(\lambda_2, \alpha_2)\big)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \lambda_2 \\ 1 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \alpha_1 & \lambda_2 + \alpha_1\alpha_2 \\ \lambda_1 & \lambda_1\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда вытекает, что $F_A(0), F_A(1) \in (0, 1)$ и, следовательно, $\omega(A) > 0$. □

Предложение 1.5 *Пусть $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$, $F_A(0) = \tau_1$, $F_A(1) = \tau_2$, $c = ||Be_2||_1/||Be_2||_1$, тогда*

$$\frac{\Delta(BA)}{\Delta(B)} = Q(c, \tau_1, \tau_2). \tag{1.13}$$

`Доказательство.` Пусть $||Ae_1||_1 = \alpha_1$, $||Ae_2||_1 = \alpha_2$, $B = (b_{ij})$, $||Be_1||_1 = \beta_1$, $||Be_2||_1 = \beta_2$. Из (1.5) получаем для $i = 1, 2$

$$Ae_i = ||Ae_i|| \cdot \psi \circ \varphi(A \cdot \psi(i-1)) = \alpha_i \cdot \psi(F_A(i-1)) = \alpha_i \cdot (1-\tau_i, \tau_i)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно,

$$||BAe_i||_1 = \alpha_i(|b_{11}(1-\tau_i) + b_{12}\tau_i| + |b_{21}(1-\tau_i) + b_{22}\tau_i|) =$$

$$= \alpha_i((b_{11}+b_{21})(1-\tau_i) + (b_{12}+b_{22})\tau_i) = \alpha_i(\beta_1(1-\tau_i) + \beta_2\tau_i).$$

Из свойства (1.11) вытекает равенство

$$\frac{\Delta(BA)}{\Delta(B)} = \frac{|\det BA|}{||BAe_1||_1 \cdot ||BAe_2||_1} \cdot \frac{||Be_1||_1 \cdot ||Be_2||_1}{|\det B|} = \frac{|\det A| \cdot \beta_1\beta_2}{||BAe_1||_1 \cdot ||BAe_2||_1}.$$

Подставив $|\det A| = \Delta(A) \cdot ||Ae_1||_1 \cdot ||Ae_2||_1 = |\tau_2 - \tau_1|\alpha_1\alpha_2$, получим

$$\frac{\Delta(BA)}{\Delta(B)} = \frac{|\tau_2-\tau_1| \cdot \alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2}{||BAe_1||_1 \cdot ||BAe_2||_1} = \frac{|\tau_2-\tau_1|\beta_1\beta_2}{|\beta_1(1-\tau_1)+\beta_2\tau_1| \cdot |\beta_1(1-\tau_2)+\beta_2\tau_2|}.$$

Подставив $\beta_2 = c\beta_1$ и сократив на β_1^2, получим требуемую формулу (1.13). $\square$

Предложение 1.6 *Для любых* $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ *и* $c \in (0, +\infty)$ *справедлива оценка*

$$Q(c, \tau_1, \tau_2) \leqslant \max\left\{\frac{1-\tau_1}{1-\tau_1+c\tau_1}, \frac{c\tau_1}{1-\tau_1+c\tau_1}\right\} \leqslant 1. \tag{1.14}$$

При этом правое неравенство обращается в равенство только при $\tau_1 \in \{0, 1\}$.

`Доказательство.` Рассмотрим на множестве $\mathbb{R} \times [0,1] \times [0,1]$ функцию

$$f(c, \tau_1, \tau_2) = \frac{c \cdot (\tau_1 - \tau_2)}{(1-\tau_1+c\tau_1)(1-\tau_2+c\tau_2)}.$$

Вычислим частную производную

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_2} = c \cdot \frac{-(1-\tau_2+c\tau_2) - (\tau_1-\tau_2)(c-1)}{(1-\tau_1+c\tau_1)(1-\tau_2+c\tau_2)^2} = -\frac{c}{(1-\tau_2+c\tau_2)^2}.$$

Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial \tau_1}(c, \tau_1, \tau_2) < 0$ для всех $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$ и $c \in (0, +\infty)$, т.е. функция f строго монотонно убывает по τ_2. Отсюда получаем

$$f(c, \tau_1, \tau_2) \leqslant f(c, \tau_1, 0) = \frac{c\tau_1}{1-\tau_1+c\tau_1} \leqslant 1,$$

$$f(c, \tau_1, \tau_2) \geqslant f(c, \tau_1, 1) = -\frac{1-\tau_1}{1-\tau_1+c\tau_1} \geqslant -1.$$

Причём верхнее неравенство обращается в равенство только при $\tau_1 = 0$, а нижнее только при $\tau_1 = 1$. Утверждение леммы непосредственно вытекает из тождества $Q(c, \tau_1, \tau_2) = |f(c, \tau_1, \tau_2)|$. $\square$

Следствие 1.7 *Для всех $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ справедлива оценка*

$$\Delta(BA) \leqslant \Delta(B).$$

Доказательство. Утверждение вытекает из (1.2), (1.13) и (1.14). □

Следствие 1.8 *Пусть $A, B \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ и $c = ||Be_2||_1/||Be_1||_1$, тогда*

$$\Delta(BA) \leqslant \max\{c, c^{-1}\} \cdot \Delta(B)\Delta(A).$$

Доказательство. Искомая оценка вытекает из (1.2), (1.13) и (1.14). □

Следствие 1.9 *Для любого $\omega_0 \in (0, 1/2)$ существует константа $k = k(\omega_0) < 1$ такая, что для всех $\tau_1, \tau_2 \in [\omega_0, 1-\omega_0]$, $c \in (0, +\infty)$ справедлива оценка*

$$Q(c, \tau_1, \tau_2) \leqslant k.$$

Доказательство. Обозначим $T = [\omega_0, 1-\omega_0]$. Функция Q непрерывна на множестве $(0, +\infty) \times T \times T$. Из (1.2) для всех $\tau_1, \tau_2 \in T$ получаем, что

$$\lim_{c \to 0} Q(c, \tau_1, \tau_2) = \lim_{c \to +\infty} Q(c, \tau_1, \tau_2) = 0.$$

Следовательно, функция Q продолжается по непрерывности на компактное топологическое пространство $[0, +\infty] \times T \times T$ и в некоторой точке $(c', \tau_1', \tau_2') \in [0, +\infty] \times T \times T$ достигает своего максимального значения $k(\omega_0)$, причём $c' \in (0, +\infty)$. Из предложения 1.6 получаем оценку $k(\omega_0) = Q(c', \tau_1', \tau_2') < 1$. □

Лемма 1.10 *Пусть задана последовательность матриц $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$. Если существует вещественное число $\omega_0 \in (0, 1/2)$ такое, что множество $\{n : \omega(A_n) \geqslant \omega_0\}$ бесконечно, то*

$$\Delta(A_1 \cdot A_2 \cdots A_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Доказательство. Обозначим $B_0 = E$, $B_n = A_1 A_2 \cdots A_n$. Рассмотрим последовательность чисел $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$t_n = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega(A_n) \geqslant \omega_0 \\ 0 & \text{при } \omega(A_n) < \omega_0 \end{cases}$$

По следствию 1.7 имеем оценку $\Delta(B_n) = \Delta(B_{n-1}A_n) \leqslant \Delta(B_{n-1})$. Если $t_n = 1$, то $F_{A_n}(0), F_{A_n}(1) \in [\omega_0, 1-\omega_0]$, и тогда из (1.13) и следствия 1.9 вытекает существование не зависящей от n константы $k = k(\omega_0) < 1$, такой что $\Delta(B_{n-1}A_n)/\Delta(B_{n-1}) \leqslant k$. Следовательно, $\Delta(B_n)/\Delta(B_{n-1}) \leqslant k^{t_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как $\Delta(B_0) = \Delta(E) = 1$, то $\Delta(B_n) \leqslant k^{m_n}$, где $m_n = \sum_{i=1}^{n} t_n$. Так как множество таких n, что $t_n = 1$, бесконечно, то $m_n \to \infty$ и $\Delta(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. □

Лемма 1.11 *Пусть $\Lambda = \Lambda(\lambda, \alpha)$, $\lambda > 1$ и $\alpha \geqslant 0$. Тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \Delta(\Lambda^n) = \frac{\lambda - 1}{\alpha + \lambda - 1} > 0.$$

`Доказательство.` Индукцией по n убеждаемся, что

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\alpha \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

Применив (1.1) получаем равенство

$$\Delta(\Lambda^n) = \left|\frac{\lambda^n}{\frac{\lambda^n-1}{\lambda-1}\alpha+\lambda^n}\right| = \left|\frac{\lambda-1}{(1-\lambda^{-n})\alpha+\lambda-1}\right|.$$

Следовательно, $\lim_{n\to\infty}\Delta(\Lambda^n) = \frac{\lambda-1}{\alpha+\lambda-1} > 0$. $\square$

Лемма 1.12 *Пусть последовательность матриц* $\{\Lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\Lambda_n \in \mathcal{A}_0$, *имеет вид* $\Lambda_n = \Lambda(\lambda_n, \alpha_n)$, *причём* $\sup\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_n \neq 1\} < 1$ *и* $\inf\limits_n \alpha_n > 0$. *Тогда*

$$\Delta(\Lambda_1 \cdot \Lambda_2 \cdots \Lambda_n) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

`Доказательство.` Обозначим $B_n = \Lambda_1 \cdots \Lambda_n$, $\lambda_0 = \sup\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}, \lambda_n \neq 1\} < 1$, $\alpha_0 = \inf \alpha_n > 0$, и $m(n) = \#\{k \in \mathbb{N} : k \leqslant n, \lambda_k \neq 1\}$. Заметим, что из $\Lambda_n \in \mathcal{A}_0 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ следует $\lambda_n \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda_n = \det\Lambda_n \neq 0$. И значит $\lambda_n > 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Покажем по индукции, что $B_n = \Lambda(\nu_n, \beta_n)$, где $\nu_n \leqslant \lambda_0^{m(n)}$ и $\beta_n \geqslant \alpha_0$. Имеем $B_1 = \Lambda_1$, $\nu_1 = \lambda_1 \leqslant \lambda_0^{m(1)}$, $\beta_1 = \alpha_1 \geqslant \alpha_0$. Так как при $n > 1$

$$B_n = B_{n-1}\Lambda_n = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_n + \beta_{n-1}\lambda_n \\ 0 & \nu_{n-1}\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta_n \\ 0 & \nu_n \end{pmatrix},$$

то $\beta_n = \alpha_n + \beta_{n-1}\lambda_n \geqslant \alpha_n \geqslant \alpha_0$. Если $\lambda_n = 1$, то $m(n) = m(n-1)$ и $\nu_n = \nu_{n-1} \leqslant \lambda_0^{m(n)}$. В противном случае $\lambda_n \leqslant \lambda_0$, $m(n) = m(n-1)+1$, и поэтому $\nu_n = \nu_{n-1}\lambda_n \leqslant \lambda_0^{m(n)}$. Применяя (1.1) получаем

$$\Delta(B_n) = \frac{\nu_n}{\beta_n + \nu_n} \leqslant \frac{\nu_n}{\beta_n} \leqslant \frac{\lambda_0^{m(n)}}{\alpha_0}.$$

В случае, если $\lim_{n\to\infty} m(n) = \infty$, то $\Delta(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим случай $\lim_{n\to\infty} m(n) = m_0 < \infty$. Пусть n_0 — минимальное натуральное число, такое что $m(n_0) = m_0$. Покажем по индукции, что при $n \geqslant n_0$ выполняются $\nu_n = \nu_{n_0}$ и $\beta_n \geqslant (n-n_0)\alpha_0$. База индукции: для $n = n_0$ имеем $\beta_{n_0} \geqslant \alpha_0 > 0 = (n-n_0)\alpha_0$. Шаг индукции: при $n > n_0$ имеем $\lambda_n = 1$, откуда получаем

$$\nu_n = \nu_{n-1}\lambda_n = \nu_{n-1} = \nu_{n_0},$$

$$\beta_n = \alpha_n + \beta_{n-1}\lambda_n \geqslant \alpha_0 + (n-1-n_0)\alpha_0 = (n-n_0)\alpha_0.$$

Применяя (1.1) к матрице B_n, получим оценку

$$\Delta(B_n) = \frac{\nu_n}{\beta_n + \nu_n} \leqslant \frac{\nu_n}{\beta_n} \leqslant \frac{\nu_{n_0}}{(n-n_0)\alpha_0}.$$

Отсюда получаем $\Delta(B_n) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

Лемма 1.13 *Любая матрица $A \in \mathcal{A}_0$ однозначно представима в виде*

$$A = r \cdot D^s \cdot \Lambda(\lambda, \alpha) \cdot D^t,$$

где $s, t \in \{0, 1\}$, $r, \lambda > 0$, $\alpha \geqslant 0$.

`Доказательство.` Если $A \in \mathcal{A}_0$, то $\omega(A) = 0$. Следовательно, найдётся $t \in \{0, 1\}$, такое что $F_A(t) = \varphi(A \cdot \psi(t)) \in \{0, 1\}$. Обозначим $s = F_A(t)$. Из равенства $\psi(t) = e_{t+1} = D^t e_1$ следует, что $\varphi(AD^t e_1) = s \in \{0, 1\}$. Следовательно, $AD^t e_1 = r \cdot e_{s+1}$, где $r = ||AD^t e_1||_1$. Причём из $\det A \neq 0$ следует, что $r > 0$. Отсюда вытекает, что $r^{-1} D^s AD^t e_1 = e_1$ и $r^{-1} D^s AD^t = \Lambda(\lambda, \alpha)$ для некоторых вещественных λ, α. Домножив на rD^s слева и на D^t справа, получим требуемое равенство $A = rD^s \Lambda(\lambda, \alpha) D^t$. Из $r^{-1} D^s AD^t \in \mathcal{A}_0 \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ следует, что $\lambda > 0$ и $\alpha \geqslant 0$. □

Лемма 1.14 *Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ справедливо равенство*

$$\mathrm{Nv}(A) = \#\{t \in [0, 1] : F_A(t) = t\}.$$

`Доказательство.` Если v — собственный вектор некоторой матрицы $A \in \mathcal{A}_0$, то для соответствующего собственного числа $\mu \neq 0$ имеем $Av = \mu \cdot v$ и

$$F_A(\varphi(v)) = \varphi(A\psi \circ \varphi(v)) = \varphi\big(A\frac{v}{||v||_1}\big) = \varphi\big(\frac{\mu}{||v||_1} \cdot v\big) = \varphi(v).$$

Таким образом, $\varphi(v)$ — неподвижная точка функции F_A.

Если же $F_A(t) = t$ для некоторого $t \in [0, 1]$, то

$$A\psi(t) = ||A\psi(t)||_1 \cdot \psi \circ \varphi(A\psi(t)) = ||A\psi(t)||_1 \cdot \psi(F_A(t)) = ||A\psi(t)||_1 \cdot \psi(t).$$

Следовательно, вектор $\psi(t)$ является собственным вектором матрицы A. Функция φ взаимно однозначно отображает множество единичных в норме $|| \cdot ||_1$ векторов из Ω на отрезок $[0, 1]$. Значит, $\mathrm{Nv}(A)$ равно числу неподвижных точек отображения F_A. □

Лемма 1.15 *Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$, если $\lim_{k\to\infty} \Delta(A^k) = 0$, то $\mathrm{Nv}(A) = 1$.*

`Доказательство.` Обозначим $H_k = F_{A^k}([0, 1])$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Из (1.9) для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$H_{k+1} = F_{A^k} \circ F_A([0, 1]) \subset F_{A^k}([0, 1]) = H_k.$$

Последовательность отрезков $\{H_k\}$ убывает. Если точка $t \in [0, 1]$ является неподвижной точкой отображения F_A, то $t \in \cap_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Из (1.8) имеем

$$\mathrm{diam}\, H_k = \mathrm{diam}\, F_{A^k}([0, 1]) = \Delta(A^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

По лемме о вложенных отрезках существует единственная точка $t_0 \in \cap_{k\in\mathbb{N}} H_k$. Из $F_A(\cap_{k\in\mathbb{N}} H_k) = \cap_{k\in\mathbb{N}} H_k$ следует, что t_0 является единственной неподвижной точкой отображения F_A. По лемме 1.14 получаем $\mathrm{Nv}(A) = 1$. □

Лемма 1.16 *Для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$, такой что $\Delta(A) < 1$, справедливо равенство*

$$Nv(A) = \begin{cases} 2, & \textit{если } A \in \mathcal{A}_1 \\ 1, & \textit{иначе.} \end{cases}$$

`Доказательство.` Рассмотрим случай $A \in \mathcal{A}_1$. Имеем $A = rD^t\Lambda D^t$ для некоторых $\Lambda = \Lambda(\lambda,\alpha)$, $r > 0$, $\lambda > 1$, $\alpha \geqslant 0$. Из $\Delta(A) = \Delta(\Lambda) < 1$ следует, что $\alpha > 0$. Так как $\Delta(A^k) = \Delta(\Lambda^k)$, то по лемме 1.11, $\lim_{k\to\infty} \Delta(\Lambda^k) > 0$. Обозначим $H_k = F_{A^k}([0,1])$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\operatorname{diam} H_k = \Delta(\Lambda^k)$ и для отрезка $H_0 = [a,b] = \cap_{k\in\mathbb{N}} H_k$ имеем $(b-a) = \operatorname{diam} H_0 = \lim_{k\to\infty} \Delta(A_k) > 0$. Так как $\det A = \lambda > 0$, по предложению 1.3 функция F_A монотонно возрастает. Из $F_A(H_0) = H_0$ получаем $F_A(a) = a$, $F_A(b) = b$ и по лемме 1.14 $\mathrm{Nv}(A) \geqslant 2$. Следовательно, $\mathrm{Nv}(A) = 2$.

Случай $A \notin \mathcal{A}_1$ распадается на два подслучая: (a) $A \notin \mathcal{A}_0$ и (b) $A \in \mathcal{A}_0 \setminus \mathcal{A}_1$. В случае (a) имеем оценку $\omega(A) > 0$. По лемме 1.10 $\lim_{k\to\infty} \Delta(A^k) = 0$. И, применяя лемму 1.15, получаем $\mathrm{Nv}(A) = 1$.

В случае (b) по лемме 1.13 получаем $A = r \cdot D^s \cdot \Lambda \cdot D^t$, где $r > 0$, $s,t \in \{0,1\}$, $\Lambda = \Lambda(\lambda,\alpha)$, $\lambda > 0$. В силу $\Delta(A) > 0$ имеем $\alpha \neq 0$. Из $A \notin \mathcal{A}_1$ получаем $s \neq t$. Следовательно, $A^2 = r^2 \cdot D^s \cdot \Lambda D \Lambda \cdot D^t$. По предложению 1.4 справедлива оценка $\omega(A^2) = \omega(\Lambda D \Lambda) > 0$. Из леммы 1.10 получаем равенство $\lim_{k\to\infty} \Delta(A^{2k}) = 0$. По следствию 1.8 последовательность $\{\Delta(A^k)\}$ не возрастает. Значит, $\lim_{k\to\infty} \Delta(A^k) = 0$ и по лемме 1.15 $\mathrm{Nv}(A) = 1$. $\square$

Лемма 1.17 *Пусть задан набор матриц $A_1, \ldots, A_n \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$, тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) $Nv(A_i \cdot A_j) = 1$ *для всех* $i,j \in I = \{1,\ldots,n\}$;

(ii) *для любого слова* $i = i_1 i_2 \ldots \in I^\infty$ *выполняется:*

$$\Delta(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdots A_{i_k}) \to 0 \textit{ при } k \to \infty. \tag{1.15}$$

`Доказательство.` Докажем импликацию (ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть $i,j \in I$. Для матрицы $A = A_i A_j$ имеем $\Delta(A^k) \to 0$ при $k \to \infty$. Применяя лемму 1.15, получаем $\mathrm{Nv}(A_i A_j) = 1$.

Докажем импликацию (i) $\Rightarrow$ (ii). Заметим, что $\mathrm{Nv}(A) \leqslant \mathrm{Nv}(A^2)$ для любой матрицы $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$. По условию (i) имеем $\mathrm{Nv}(A_j^2) = 1$ для всех $j \in I$. Следовательно,

$$\mathrm{Nv}(A_j) = 1 \text{ для всех } j \in I. \tag{1.16}$$

Выберем произвольное слово $i = i_1 i_2 \ldots \in I^\infty$. Обозначим $\mathcal{K}_0 = \{k \in \mathbb{N} : A_{i_k} \notin \mathcal{A}_0\}$. Рассмотрим два случая: (A) множество $\mathcal{K}_0$ счётно и (B) множество $\mathcal{K}_0$ конечно. В случае (A) последовательность матриц $\{A_{i_k}\}$ удовлетворяет условиям леммы 1.10 с константой $\omega_0 = \min\{\omega(A_j) : j \in I,\ \omega(A_j) > 0\}$, и, значит, выполняется (1.15).

Случай (B). Обозначим $m_0 = 1 + \max\bigl(\mathcal{K}_0 \cup \{0\}\bigr) < \infty$. Таким образом, $A_{i_k} \in \mathcal{A}_0$ для всех $k \geqslant m_0$. По лемме 1.13 для любого $k \geqslant m_0$ найдутся такие $r_k, \lambda_k > 0, \alpha_k \geqslant 0, t_k, s_k \in \{0,1\}$, что

$$A_{i_k} = r_k \cdot D^{s_k} \cdot \Lambda(\lambda_k, \alpha_k) \cdot D^{t_k}.$$

Из (1.16) следует, что $\alpha_k \neq 0$. Таким образом,

$$\alpha_k > 0 \text{ для всех } k \geqslant m_0.$$

Обозначим $\Lambda_k = \Lambda(\lambda_k, \alpha_k)$ и $\mathcal{K}_1 = \{k \in \mathbb{N} :\ k \geqslant m_0,\ t_k \neq s_{k+1}\}$. Если множество $\mathcal{K}_1$ счётно, то для каждого $k \in \mathcal{K}_1$ имеем

$$A_{i_k} A_{i_{k+1}} = r_k r_{k+1} \cdot D^{s_k} \cdot \Lambda(\lambda_k, \alpha_k) \cdot D \cdot \Lambda(\lambda_{k+1}, \alpha_{k+1}) \cdot D^{t_{k+1}}$$

По предложению 1.4 справедлива оценка $\omega(A_{i_k} A_{i_{k+1}}) = \omega(\Lambda_k \cdot D \cdot \Lambda_{k+1}) > 0$. Следовательно, произведение матриц $\prod_{k=1}^{\infty} A_{i_k}$ содержит счётное число множителей вида $A_{i_k} A_{i_{k+1}}$, таких что $\omega(A_{i_k} A_{i_{k+1}}) \geqslant \omega_0 > 0$, где

$$\omega_0 = \min\{\omega(A_{j_1} A_{j_2}) :\ j_1, j_2 \in I,\ \omega(A_{j_1} A_{j_2}) > 0\},$$

что по лемме 1.10 даёт (1.15).

Рассмотрим случай, когда множество $\mathcal{K}_1$ конечно. Обозначим

$$m_1 = 1 + \max\big(\mathcal{K}_1 \cup \{m_0 - 1\}\big) \geqslant m_0.$$

Тогда для всех $m \geqslant m_1$ имеем $t_m = s_{m+1}$, и

$$\prod_{k=m_1}^{m} A_{i_k} = D^{s_{m_1}} \cdot \Big(\prod_{k=m_1}^{m} r_k \Lambda_k\Big) \cdot D^{t_m}.$$

Следовательно, $\Delta(\prod_{k=m_1}^{m} A_{i_k}) = \Delta(\prod_{k=m_1}^{m} \Lambda_k)$.

Обозначим $\mathcal{K}_2 = \{k \in \mathbb{N} :\ k \geqslant m_1,\ s_k \neq t_k\}$. Если множество $\mathcal{K}_2$ конечно, то обозначим $m_2 = 1 + \max\big(\mathcal{K}_2 \cup \{m_1 - 1\}\big) < +\infty$. Для всех $k \geqslant m_2$ имеем $s_k = t_k$. Из равенства (1.16) и леммы 1.16 получаем $A_{i_k} \notin \mathcal{A}_1$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Следовательно, $\lambda_k < 1$ при $k \geqslant m_2$, и по лемме 1.12 имеем

$$\Delta\Big(\prod_{k=m_2}^{m} A_k\Big) = \Delta\Big(\prod_{k=m_2}^{m} \Lambda_k\Big) \underset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Используя следствие 1.8, отсюда получаем, что условие (ii) выполнено.

Рассмотрим оставшийся случай, когда множество $\mathcal{K}_2$ счётно. Занумеруем множество $\mathcal{K}_2$ возрастающей последовательностью натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$. Обозначим $B_j = A_{i_{k_j}}$ и $C_j = \prod_{k=k_j+1}^{k_{j+1}-1} A_{i_k}$ (положим $C_j = E$, если $k_j + 1 = k_{j+1}$) для $j \in \mathbb{N}$. Для всех $k \geqslant k_0$ имеем $t_k = s_{k+1}$. Следовательно, для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$C_j = D^{t_{k_j}} \Big(\prod_{k=k_j+1}^{k_{j+1}-1} \Lambda_{i_k}\Big) D^{s_{k_{j+1}}}.$$

Так как для всех $k_j + 1 \leqslant k \leqslant k_{j+1} - 1$ имеем $k \notin \mathcal{K}_2$ и $\det A_{i_k} > 0$, то $\det C_j > 0$ и $t_{k_j} = s_{k_{j+1}}$ для $j \in \mathbb{N}$. Из $\det B_j < 0$ получаем $s_{k_j} \neq t_{k_j}$, откуда следует $s_{k_{j+1}} = 1 - s_{k_j}$ и $s_{k_{2j-1}} = s_{k_1}$ для $j \in \mathbb{N}$. Значит,

$$B_{2j-1} B_{2j} = A_{i_{k_{2j-1}}} A_{i_{k_{2j}}} = D^{s_{k_1}} \Lambda_{k_{2j-1}} \Lambda_{k_{2j}} D^{s_{k_1}},$$

$$\Lambda_{k_{2j-1}}\Lambda_{k_{2j}} = \Lambda(\alpha_{k_{2j}} + \alpha_{k_{2j-1}}\lambda_{k_{2j}}, \lambda_{k_{2j-1}}\lambda_{k_{2j}}).$$

$\mathrm{Nv}(\Lambda_{k_{2j-1}}\Lambda_{k_{2j}}) = \mathrm{Nv}(A_{i_{k_{2j-1}}}A_{i_{k_{2j}}}) = 1$ по условию леммы. Следовательно, $\Lambda_{k_{2j-1}}\Lambda_{k_{2j}} \notin \mathcal{A}_1$. Откуда получаем $\lambda_{i_{k_{2j-1}}}\lambda_{i_{k_{2j}}} \leqslant 1$. Обозначим

$$G_j = \prod_{k=k_{2j-1}}^{k_{2j}-1} \Lambda_k \text{ для } j \in \mathbb{N},$$

$$\nu_1 = \sup\{\lambda_{k_{2j-1}}\lambda_{k_{2j}} : j \in \mathbb{N},\, \lambda_{k_{2j-1}}\lambda_{k_{2j}} < 1\},$$
$$\nu_2 = \sup\{\lambda_k : k \geqslant k_1,\, \lambda_k < 1\},$$
$$\alpha_0 = \inf\{\alpha_k : k \geqslant k_1\}.$$

Множество матриц $\{\Lambda_k\}_{k=k_1}^{\infty}$ конечно, т.к. порождено конечным набором $\{A_1, \dots, A_n\}$, и, значит, конечны множества $\{\lambda_k\}_{k=k_1}^{\infty}$ и $\{\alpha_k\}_{k=k_1}^{\infty}$. Следовательно, $\nu_1 < 1$ и $\nu_2 < 1$. Так как $\alpha_k > 0$ для всех $k \geqslant k_0$, то $\alpha_0 > 0$.

Представим G_j в виде $G_j = \Lambda(\alpha'_j, \lambda'_j)$. Тогда $\alpha'_j \geqslant \alpha_{k_{2j-1}} \geqslant \alpha_0$. Так как $\lambda'_j = \prod_{p=k_{2j-1}}^{k_{2j}-1} \lambda_p$, то либо $\lambda'_j = 1$, либо $\lambda'_j \leqslant \max\{\nu_1, \nu_2\} < 1$. Выполняются условия леммы 1.12. Следовательно, $\Delta(\prod_{j=1}^{m} G_j) \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда получаем, что

$$\Delta(\prod_{k=k_1}^{k_{2m}-1} A_{i_k}) = \Delta(\prod_{k=k_1}^{k_{2m}-1} \Lambda_{i_k}) = \Delta(\prod_{j=1}^{m} G_j) \to 0 \text{ при } m \to \infty.$$

По следствию 1.7 последовательность $\{\Delta(\prod_{k=k_1}^{m} A_k)\}_{m=1}^{\infty}$ не возрастает. Значит, $\Delta(\prod_{k=k_1}^{m} A_{i_k}) \to 0$ при $m \to \infty$. Применяя следствие 1.8, получаем (1.15). □

`Доказательство теоремы 1.1.` Покажем сначала, что вырожденные операторы не влияют на выполнение условий (i) и (ii). Если в условии (i) при некоторых $i, j \in I$ один из операторов L_i, L_j вырожден, то вырожден и оператор L_{ij}. Множество $L_{ij}U$ является лучом, и, следовательно, $\mathrm{Nv}(L_iL_j, U) = 1$.

Если в условии (ii) при некоторых $i \in I^{\infty}$, $m \in \mathbb{N}$ оператор L_{i_m} вырожден, то $\theta(L_{i|_k}U) = 0$ при $k \geqslant m$. Следовательно, $\lim_{k\to\infty} \theta(L_{i|_k}U) = 0$.

Таким образом, вырожденные операторы не влияют на выполнение условий (i) и (ii) теоремы. Если все операторы L_i $(i \in I)$ вырождены, то условия (i),(ii) выполняются. Далее будем без ограничения общности считать, что все операторы L_i невырождены.

Выберем на сторонах конуса U единичные векторы e'_1 и e'_2, так чтобы

$$U = \{\lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in [0, \infty)\}.$$

Если векторы e'_1 и e'_2 совпадают, то условия (i) и (ii) выполнены. В самом деле, конус U в этом случае является лучом, исходящим из начала координат. Таким образом, $\theta(L_iU) = \theta(U) = 0$ для всех $i \in I^*$. Следовательно, для всех $i \in I^*$ $\mathrm{Nv}(L_i, U) \leqslant 1$, и по (1.3) получаем, что $\mathrm{Nv}(L_i, U) = 1$.

Рассмотрим случай, когда векторы e'_1, e'_2 линейно независимы, т.е. (e'_1, e'_2) — базис в $\mathbb{R}^2$. Пусть операторы $L_1, \dots, L_n$ представляются в базисе (e'_1, e'_2) матрицами $A_1, \dots, A_n$ соответственно. Конус U в базисе (e'_1, e'_2) является конусом Ω. Из невырожденности операторов $\{L_i\}$ следует $\det A_i \neq 0$ для всех $i \in I$. Условие $L_i U \subset U$ записывается в виде $A_i \Omega \subset \Omega$. Следовательно, все элементы матриц $\{A_i\}$ неотрицательны, и $A_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$ для $i \in I$.

Так как $\mathrm{Nv}(L_i, U) = \mathrm{Nv}(A)$, то условие (i) теоремы эквивалентно условию (i) леммы 1.17.

Зададим линейное отображение $v(t) = e_1' t + e_2'(1-t)$ отрезка $[0,1]$ на отрезок $[e_1', e_2']$. Обозначим $\alpha(t_1, t_2) = (v(t_1) \hat{} v(t_2))$ для $t_1, t_2 \in [0,1]$. Единичные векторы e_1', e_2' образуют равносторонний треугольник с высотой $h = cos(\theta(U)/2) > 0$. Для всех $t \in [0,1]$ точка $v(t)$ лежит на основании этого треугольника, следовательно, $h \leqslant v(t) \leqslant 1$.

Пусть $i \in I^*$, $t_1 = \varphi(A_i e_1)$, $t_2 = \varphi(A_i e_2)$ $(t_1, t_2 \in [0,1])$. Векторы $v(t_1), v(t_2)$ образуют треугольник с площадью $S_1 = h \cdot ||v(t_1) - v(t_2)||$. Обозначим $u_1 = v(t_1)/||v(t_1)||$, $u_2 = v(t_2)/||v(t_2)||$ и

$$\alpha = (u_1 \hat{} u_2) = (v(t_1) \hat{} v(t_2)) = \alpha(t_1, t_2).$$

Площадь равнобедренного треугольника со сторонами u_1, u_2 равна $S_2 = 2\sin(\alpha/2)$. Треугольник со сторонами $v(t_1), v(t_2)$ лежит внутри треугольника со сторонами u_1, u_2 и содержит треугольник со сторонами $h \cdot u_1, h \cdot u_2$. Следовательно, $h^2 \cdot S_2 \leqslant S_1 \leqslant S_2$. Отсюда получаем неравенство

$$h^2 \cdot 2\sin(\alpha/2) \leqslant h \cdot ||v(t_1) - v(t_2)|| \leqslant 2\sin(\alpha/2).$$

Учитывая, что $||v(t_1) - v(t_2)|| = |t_1 - t_2| \cdot ||e_1 - e_2||$, получаем оценку

$$0 < c_1 \leqslant \frac{|t_1 - t_2|}{\sin(\alpha(t_1, t_2)/2)} \leqslant c_2 < \infty, \tag{1.17}$$

где $c_1 = 2h \cdot ||e_1 - e_2||^{-1}$ и $c_2 = 2h^{-1} \cdot ||e_1 - e_2||^{-1}$.

Пусть T — матрица перехода от канонического базиса (e_1, e_2) к базису (e_1', e_2'). Тогда для любого $t \in [0,1]$

$$T\psi(t) = T(e_1(1-t) + e_2 t) = e_1'(1-t) + e_2' t = v(t).$$

Из равенства $\psi(t_k) = \psi \circ \varphi(A_i e_k) = A_i e_k / ||A_i e_k||$ для $k = 1, 2$ получаем

$$A_i \Omega = \mathrm{cone}\,\{A_i e_1, A_i e_2\} = \mathrm{cone}\,\{\psi(t_1), \psi(t_2)\},$$

$$L_i U = \mathrm{cone}\,\{T\psi(t_1), T\psi(t_2)\} = \mathrm{cone}\,\{v(t_1), v(t_2)\},$$
$$\theta(L_i U) = (v(t_1) \hat{} v(t_2)) = \alpha(t_1, t_2).$$

Кроме того,

$$|t_1 - t_2| = |\varphi(A_i e_1) - \varphi(A_i e_2)| = |F_A(1) - F_A(0)| = \Delta(A_i).$$

Подставляя полученные равенства в (1.17), получаем оценку

$$c_1 \leqslant \frac{\Delta(A_i)}{\sin(\theta(L_i U)/2)} \leqslant c_2.$$

Таким образом, для любого индекса $i \in I^\infty$ равенство $\lim_{k\to\infty} \Delta(A_{i|_k}) = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $\lim_{k\to\infty} \theta(L_{i|_k}U) = 0$. Т.е. условие (ii) теоремы эквивалентно условию (ii) леммы 1.17, и, следовательно, утверждение теоремы непосредственно вытекает из леммы 1.17. □

Теорема 1.1 допускает частичное обобщение на m-мерный случай.

Лемма 1.18 *Пусть заданы непустой острый замкнутый выпуклый конус $U \subset \mathbb{R}^m$ и набор линейных операторов $L_1, \dots, L_n \in \mathfrak{G}_m(U)$, такой что $L_i \neq 0$ для всех $i \in I^*$. Если*

$$\lim_{k\to\infty} \theta(L_{i|_k}U) = 0 \text{ для всех } i \in I^\infty, \tag{1.18}$$

то

$$\mathrm{Nv}(L_j, U) = 1 \text{ для всех } j \in I^*. \tag{1.19}$$

Доказательство. Предположим обратное к (1.19). Пусть $\mathrm{Nv}(L_j, U) \geqslant 2$ при некотором $j \in I^*$. Тогда существуют два различных собственных вектора $v_1, v_2 \in U$ оператора L_j. Для всех k имеем $v_1, v_2 \in L_j^k U$ и $\theta(L_j^k U) \geqslant v_1 \hat{} v_2$. Следовательно, для слова $i = j(j) \in I^\infty$, $\lim_{k\to\infty} \theta(L_{i|_k}U) \geqslant v_1 \hat{} v_2 > 0$, что противоречит условию (1.18). □

Нижеследующий пример показывает, что в общем случае для выполнения свойства (1.18) ни при каком $k \in \mathbb{N}$ недостаточно выполнения условия «$\mathrm{Nv}(L_i, U) = 1$ для всех $i \in I^k$».

Пример 1.1 Зафиксируем натуральное число $n \geqslant 3$. Зададим острый замкнутый выпуклый конус

$$U = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_2^2 + x_3^2 \leqslant x_1^2\}.$$

Введём матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \; C_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{2\pi k}{n} & \sin\frac{2\pi k}{n} \\ 0 & \sin\frac{2\pi k}{n} & \cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}$$

для $k = 0, 1, \dots, n$. И определим набор матриц $A_1, A_2, \dots, A_n$ равенствами $A_k = C_{k-1}BC_k^{-1}$ $(k = 1, \dots, n)$. Линейные операторы, представляемые в каноническом базисе матрицами $A_1, \dots, A_n$, будем обозначать теми же буквами, что и матрицы. Покажем, что выполняются следующие свойства:

(i) $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{G}_m(U)$

(ii) $\mathrm{Nv}(A_i, U) = 1$ для всех $i \in I^{n-1}$;

(iii) $\mathrm{Nv}(A_j, U) = 2$ для слова $j = 1\,2\,3 \dots n \in I^n$.

Определим функцию $w : U \to \mathbb{R}$ по формуле

$$w(x) = \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} \text{ для } x \in U \setminus \{0\} \text{ и } w(0) = 1.$$

Тогда $U = \{x \in \mathbb{R}^m : w(x) \leqslant 1\}$. Из $|x_2| \leqslant |x_1|$ получаем $(2x_1 - x_2)^2 \leqslant x_1^2$ и

$$w(Bx) = \frac{\frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}x_3^2}{(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2} = \frac{x_2^2 + x_3^2}{(2x_1 - x_2)^2} \leqslant \frac{x_2^2 + x_3^2}{x_1^2} = w(x).$$

Для любого $k = 0, \ldots, k$ выполняется равенство $w(C_k x) = w(x)$, откуда следует $w(A_k x) \leqslant 1$. Это доказывает свойство (i).

Матрица B имеет три собственных вектора e_1, $\gamma_0 = e_1 - e_2$ и e_3, причём только первые два из них попадают в конус U. Эти же три вектора являются собственными векторами матрицы B^n. Следовательно, $\mathrm{Nv}(B^n, U) = 2$. Из равенства $A_j = A_1 A_2 \cdots A_n = B^n$ получаем справедливость свойства (iii).

Вектор $e_1 \in U$ является собственным вектором для матриц B и C_k, следовательно, он является собственным вектором для матриц A_k. Значит, $\mathrm{Nv}(A_k, U) \geqslant 1$ для $k = 1, \ldots, n$.

Пусть для некоторого $i \in I^*$ выполнено неравенство $\mathrm{Nv}(A_i, U) \geqslant 2$, докажем, что $|i| \geqslant n$. Обозначим $\gamma \in U \setminus \{0\}$ — собственный вектор матрицы A_i отличный от e_1. Рассмотрим инвариантное подпространство $X_0 = \mathrm{span}\{e_1, \gamma\}$ матрицы A_i. Пересечение $U_0 = U \cap X_0$ является острым замкнутым выпуклым конусом в X_0 с углом раствора $\theta(U_0) = \pi/2$. Выберем на его сторонах ортогональные единичные векторы e_1', e_2'. Конус U_0 в базисе e_1', e_2' представляется конусом Ω. Сужение оператора A_i на подпространство X_0 представляется некоторой матрицей $\Lambda \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}_+)$. Из $\mathrm{Nv}(A) = 2$ по лемме 1.16 имеем $\Lambda \in \mathcal{A}_1$. Из вида матрицы Λ вытекает, что один из её собственных векторов принадлежит границе конуса Ω. Следовательно, один из собственных векторов матрицы A_i принадлежит границе конуса U, а именно $\gamma \in \partial U = \{x \in U : w(x) = 1\}$. Отсюда получаем

$$w(\gamma) = w(A_i \gamma) = 1.$$

Найдём корни уравнения $w(Bx) = 1$ при $x \in U \setminus \{0\}$. Если $x_3 \neq 0$, то

$$w(Bx) = \frac{x_2^2 + x_3^2}{(2x_1 - x_2)^2} < \frac{x_2^2}{(2x_1 - x_2)^2} \leqslant 1.$$

Следовательно, $x_3 = 0$ и уравнение принимает вид

$$w(Bx) = \frac{x_2^2}{(2x_1 - x_2)^2} = 1,$$

$$x_2^2 = (2x_1 - x_2)^2,$$

$$x_1^2 + x_2 x_1 = x_1(x_1 - x_2) = 0.$$

Из $x \in U \setminus \{0\}$ следует $x_1 > 0$. Отсюда получаем $x_1 = x_2 \in (0, +\infty)$. Таким образом, вектор $x = \gamma_0 = (1, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ является единственным, с точностью до умножения на константу, решением уравнения $w(Bx) = 1$. Следовательно, единственным с точностью до умножения на константу решением уравнения $w(A_k \gamma) = 1$ является вектор $C_k \gamma_0$.

Из неравенств

$$1 = w(\gamma) \geqslant w(A_{i_1} \gamma) \geqslant w(A_{i_1 i_2} \gamma) \geqslant \ldots \geqslant w(A_i \gamma) = 1$$

получаем $\gamma = C_{i_1}\gamma_0$, $A_{i_1}\gamma = \frac{1}{2}C_{(i_1 \bmod n)+1}\gamma_0 = \frac{1}{2}C_{i_2}\gamma_0$. Следовательно, $i_2 = (i_1 \bmod n) + 1$. По индукции получаем $A_{i_k}\gamma = \frac{1}{2^k}C_{(i_k \bmod n)+1}\gamma_0$ и $i_k = (i_1 - 1 + k) \bmod n + 1$ для $k = 1, 2, \ldots, |i|$. При $k = |i|$ имеем

$$A_i\gamma = \frac{1}{2^{|i|}}C_{((i_1-1+|i|) \bmod n)+1}\gamma_0 = \frac{1}{2^{|i|}}\gamma = C_{i_1}\gamma_0.$$

Отсюда следует $|i| \bmod n = 0$. Следовательно, $|i| \geqslant n$. Таким образом, свойство (ii) доказано. Из (ii) и леммы 1.18 вытекает, что нарушается свойство (1.18).

2. Гладкие самоаффинные цепперы. Система $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ сжимающих отображений полного метрического пространства (X, ρ) в себя, удовлетворяющая условию: «существуют набор точек $x_0, \ldots, x_n \in X$ и бинарный вектор $(s_1, \ldots, s_n) \in \{0,1\}^n$, такие что $S_j(x_0) = x_{j-1+s_j}$ и $S_j(x_n) = x_{j-s_j}$ для всех $j = 1, \ldots, n$», называется *циппером с вершинами* $\{x_0, \ldots, x_n\}$ и *сигнатурой* $(s_1, \ldots, s_n)$ (см. [1, стр. 482]). По теореме Хатчинсона [9, 3.1(3), стр.724], существует единственное компактное множество K, называемое *аттрактором* системы $\mathbf{S}$, такое что $K = \cup_{i=1}^n S_i(K)$. Известно, что аттрактор любого циппера представим в виде непрерывной кривой:

Лемма 2.1 (см. [1, Лемма 1.1]) *Для любого циппера $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ с вершинами $x_0, \ldots, x_n$ и сигнатурой $(s_1, \ldots, s_n)$ в полном метрическом пространстве (X, ρ) и для любого набора точек $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ на отрезке $J = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$ существует единственное непрерывное сюрьективное отображение $f : J \to |\mathbf{S}|$, при котором $f(t_i) = x_i$ и $S_i \circ f = f \circ T_i$ для каждого $i \in I$, где*

$$T_i(t) = \begin{cases} t_{i-1}(1-t) + t_i t, & \textit{если } s_i = 0 \\ t_{i-1}t + t_i(1-t), & \textit{иначе.} \end{cases} \tag{2.20}$$

Любое такое отображение f будем называть *структурной параметризацией* циппера $\mathbf{S}$. Циппер $\mathbf{S}$ с аттрактором Γ назовём *невырожденным*, если $\operatorname{diam} S_i(\Gamma) > 0$ для всех $i \in I^*$, и назовём *жордановым*, если какая-либо его структурная параметризация является гомеоморфизмом. *Непрерывной кривой* K называется непрерывный образ отрезка $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ при некотором непрерывном отображении $f : [t_1, t_2] \to K$, а само отображение f называется *параметризацией* кривой K. Две параметризации $f : [t_1, t_2] \to K$ и $g : [t_3, t_4] \to K$ кривой K называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h : [t_1, t_2] \to [t_3, t_4]$, такой что $f = g \circ h$ всюду на $[t_1, t_2]$. Заметим, что все структурные параметризации произвольного циппера эквивалентны. Будем говорить, что параметризация f кривой K *невырождена*, если она не переводит никакой отрезок в одноточечное множество. Циппер $\mathbf{S}$ с аттрактором $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ назовём *гладким*, если существует непрерывно дифференцируемая параметризация $f : [0,1] \to \mathbb{R}^m$, $f([0,1]) = \Gamma$, эквивалентная некоторой структурной параметризации циппера.

Циппер состоящий из аффинных отображений $S_1, \ldots, S_n$ называется *самоаффинным* и его аттрактор будем называть *самоаффинной кривой*. Для любого аффинного отображения S вида $S(x) = Lx + b$, где $L \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)$, $b \in \mathbb{R}^m$, линейную часть отображения S будем обозначать $\frac{d}{dx}S(x) = L$.

Лемма 2.2 *Пусть $\mathbf{S} = (S_1, \ldots, S_n)$ — самоаффинный циппер с вершинами $x_0, \ldots, x_n$, сигнатурой $(s_1, \ldots, s_n)$, со структурной параметризацией $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, и $L_i^+ = (-1)^{s_i} \cdot \frac{d}{dx} S(x)$. И пусть существует острый выпуклый замкнутый конус, такой что $(x_n - x_0) \in U$ и $L_i^+ U \subset U$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда $(f(t'') - f(t')) \in U$ для любых $0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant 1$.*

`Доказательство.` Пусть K — аттрактор циппера $\mathbf{S}$. И пусть $f : [0,1] \to K$ — структурная параметризация, соответствующая разбиению $t_i = i/n$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ отрезка $J = [0,1]$. Тогда отображения $T_i : J \to J$, определённые как в лемме 2.1, можно записать в виде

$$T_i(t) = t_{i-1+s_i} t + t_{i-s_i}(1-t).$$

Выберем произвольное $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $t_i^k = i/n^k$ для $i = 0, 1, \ldots, n^k$. Определим множество

$$W_k = \{T_j(\{0,1\}) : \ j \in I^k\} = \{t_i^k : \ i = 0, 1, \ldots, n^k\}.$$

Для любого $i = 1, \ldots, n^k$ существует слово $q \in I^k$, такое что $[t_{i-1}^k, t_i^k] = T_q(J)$, причём $t_{i-1}^k = T_q(s_q)$ и $t_i^k = T_q(1 - s_q)$. Следовательно,

$$f(t_i^k) - f(t_{i-1}^k) = f \circ T_q(s_q) - f \circ T_q(1 - s_q) =$$

$$= S_q \circ f(s_q) - S_q \circ f(1 - s_q) = (-1)^{s_q} \cdot (S_q \circ f(1) - S_q \circ f(0)) =$$

$$= (-1)^{s_q} \cdot (S_q(x_n) - S_q(x_0)) = L_q^+(x_n - x_0) \in U.$$

Для любых $i, j = 0, \ldots, n^k$, $i < j$ в силу выпуклости конуса U имеем

$$f(t_j^k) - f(t_i^k) = \sum_{p=i+1}^{j} (f(t_p^k) - f(t_{p-1}^k)) \in U.$$

Т.к. множество $\cup_{k \in \mathbb{N}} W_k$ всюду плотно на отрезке J, отображение f непрерывно и конус U замкнут, то $(f(t'') - f(t')) \in U$ для всех $0 \leqslant t' \leqslant t'' \leqslant 1$. $\square$

Лемма 2.3 *Пусть U — острый выпуклый конус и $K \subset \mathbb{R}^2$ — непрерывная кривая с невырожденной параметризацией $f : [0,1] \to K$, такой что для любых $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ выполняется $(f(t_2) - f(t_1)) \in U$. И пусть функция $l(t)$ равна длине участка кривой $f([0,t])$ для всех $t \in [0,1]$. Тогда*

(i) кривая K спрямляема, т.е. $l(1) < \infty$;

(ii) для любых $t_1, t_2 \in [0,1]$ справедлива оценка

$$\cos(\theta(U)/2) \leqslant \frac{||f(t_1) - f(t_2)||}{|l(t_1) - l(t_2)|} \leqslant 1;$$

(iii) кривая K в некотором базисе (e_1', e_2') представима в виде графика непрерывной вещественной функции $g : [a_1, a_2] \to \mathbb{R}$.

Доказательство. Обозначим $e'_1 \in U$ — единичный вектор, направленный вдоль оси симметрии конуса, и e'_2 — ему ортогональный единичный вектор. Положим $P_i v = (v, e'_i)$ для $i = 1, 2$. Т.к. кривая K является связанным и компактным множеством, то множество $P_1(K) \subset \mathbb{R}$ является замкнутым отрезком. Зафиксируем произвольные $t_1, t_2 \in [0, 1]$, $t_1 < t_2$. Из того, что $((f(t_1) - f(t_2))\hat{\ } e'_2) \leqslant \theta(U)/2$, следует неравенство

$$1 \geqslant \frac{P_1 f(t_2) - P_1 f(t_1)}{||f(t_2) - f(t_1)||} \geqslant \cos(\theta(U)/2). \tag{2.21}$$

Для любого набора точек $t_1 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k = t_2$ длина ломаной $(f(\tau_1), \ldots, f(\tau_k))$ ограничена:

$$\sum_{i=1}^{k-1} ||f(\tau_{i+1}) - f(\tau_i)|| \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \frac{P_1 f(\tau_{i+1}) - P_1 f(\tau_i)}{cos(\theta(U)/2)} \leqslant \frac{P_1 f(t_2) - P_1 f(t_1)}{cos(\theta(U)/2)}.$$

Переходя к точной верхней грани по всем таким наборам $\{\tau_i\}$, получаем оценку

$$|l(t_2) - l(t_1)| \leqslant \frac{P_1 f(t_2) - P_1 f(t_1)}{cos(\theta(U)/2)} \leqslant \frac{||f(t_2) - f(t_1)||}{cos(\theta(U)/2)}.$$

Учитывая, что $||f(t_2) - f(t_1)|| \leqslant |l(t_2) - l(t_1)|$, то вместе с предыдущим неравенством это доказывает пункт (ii) данной леммы. Подставляя сюда $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, получаем пункт (i) ($l(1) < \infty$).

Из неравенства (2.21) следует, что отображение P_1 на множестве K является гомеоморфизмом. Обозначив $a_1 = P_1(f(0))$, $a_2 = P_1(f(1))$, получим $[a_1, a_2] = P_1(K)$. Пусть $h : [a_1, a_2] \to K$ обратное отображение к $P_1|_K$. Тогда кривая K является в базисе (e'_1, e'_2) графиком функции $g(t) = P_2(h(t))$. $\square$

Следствие 2.4 *Если циппер* $\mathbf{S}$ *удовлетворяет условиям леммы 2.2, то аттрактор циппера* $\mathbf{S}$ *имеет положительную и конечную меру Хаусдорфа размерности 1, а также имеет касательные почти всюду в смысле меры Хаусдорфа.*

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из лемм 2.2, 2.3 и того, что любая спрямляемая кривая имеет положительную и конечную меру Хаусдорфа размерности 1 (см. [7, Lemma 3.2, p.29]), а также имеет касательные почти всюду (см. [7, Theorem 3.8, p.32]). $\square$

Теорема 2.5 *Пусть* $\mathbf{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ *невырожденный самоаффинный циппер с вершинами* $x_0, \ldots, x_n$ *и сигнатурой* $(s_1, \ldots, s_n)$. *И пусть* $L_i^+ = (-1)^{s_i} \cdot \frac{d}{dx} S_i(x)$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Циппер* $\mathbf{S}$ *является гладким тогда и только тогда, когда существует острый замкнутый выпуклый конус* U, *удовлетворяющий следующим четырём условиям:*

(i) $(x_n - x_0) \in U$;

(ii) $L_i^+ U \subset U$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$;

(iii) *существует набор векторов* $\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} \subset U$ *такой, что для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$ *выполнены условия:*

$$L_i^+\gamma_0 \uparrow\uparrow \gamma_{i-1+s_i} \text{ и } L_i^+\gamma_n \uparrow\uparrow \gamma_{i-s_i}, \text{ если } ker L_i^+ = 0;$$

$$\gamma_{i-1}, \gamma_i \in L_i^+ U, \text{ если } \ker L_i^+ = 0.$$

(iv) $\mathrm{Nv}(L_i^+ \cdot L_j^+, U) = 1$ *для всех* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть K — аттрактор циппера $\mathbf{S}$, $f : [0,1] \to K$ — его структурная параметризация, соответствующая некоторому разбиению $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ отрезка $J = [0,1]$, и $\{T_1, \ldots, T_n\}$ — отображения отрезка J в себя, определённые по формуле (2.20). Положим $L_i = \frac{d}{dx} S_i$ для $i \in I$.

Пусть циппер $\mathbf{S}$ — гладкий. Докажем, что условия (i)–(iv) выполнены. Обозначим $l(t)$ длину дуги кривой $f([0,t])$ для $t \in [0,1]$, и $l_1 = l(1)$. Существует непрерывно дифференцируемая естественная параметризация $g : [0, l_1] \to K$ кривой K, такая что $f = g \circ l$ всюду на $[0,1]$.

Обозначим $\eta_i = l \circ T_i \circ l^{-1} : [0, l_1] \to [0, l_1]$ для $i = 1, \ldots, n$. Тогда для всех $i = 1, \ldots, n$ выполняется тождество

$$g \circ \eta_i = g \circ l \circ T_i \circ l^{-1} = f \circ T_i \circ l^{-1} = S_i \circ f \circ l^{-1} = S_i \circ g.$$

Определим конус

$$U = \operatorname{cone} g'([0, l_1]),$$

и определим набор векторов $\gamma_0, \ldots, \gamma_n$ по формуле

$$\gamma_i = g'(l(t_i)) \text{ для } i \in I.$$

Т.к. множество $g'([0, l_1])$ компактно и лежит на единичной окружности, то конус U замкнут. Обозначим $H_0 = [0, l_1]$, $H_i = \eta_i(H_0)$, $U_i = L_i^+ U$ для всех $i \in I^*$.

Так как $g'(t) \in U$ всюду на отрезке $[0, l_1]$, то для всех $0 \leqslant \tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant l_1$ выполнено

$$g(\tau_2) - g(\tau_1) = \int_{\tau_2}^{\tau_1} g'(t)\, dt \in U.$$

В частности, $(x_n - x_0) = g(l_1) - g(0) \in U$, что доказывает условие (i).

Для любых $i \in I$, $\tau, \tau' \in [0, l_1]$ имеем $\operatorname{sign}\left(\frac{\eta_i(\tau') - \eta_i(\tau)}{\tau' - \tau}\right) = (-1)^{s_i}$. Следовательно,

$$L_i^+ \frac{g(\tau') - g(\tau)}{\tau' - \tau} = \frac{S_i \circ g(\tau') - S_i \circ g(\tau)}{\tau' - \tau} = (-1)^{s_i} \frac{g \circ \eta_i(\tau') - g \circ \eta_i(\tau)}{\tau' - \tau} \in U.$$

Переходя к пределу при $\tau' \to \tau$, получим $L_i^+ g'(\tau) \in U$ для всех $\tau \in [0, l_1]$. Из выбора конуса U следует включение $L_i^+ U \subset U$. Это в точности даёт условие (ii).

Кроме того, если $\eta_i(\tau') \leqslant \eta_i(\tau)$, то

$$g \circ \eta_i(\tau') - g \circ \eta_i(\tau) = L_i^+ \cdot (-1)^{s_i} (g(\tau') - g(\tau)) \in L_i^+ U.$$

Отображение η_i осуществляет гомеоморфизм отрезка $[0,1]$ на отрезок H_i. Следовательно, для всех $t, t' \in H_i$ таких, что $t \leqslant t'$ имеем $g(t') - g(t) \in L_i^+ U$ и, значит, $g'(t) \in L_i^+ U$

для всех $t \in H_i$. Отсюда получаем $\gamma_{i-1}, \gamma_i \in L_i^+ U$. Для вырожденных операторов L_i это доказывает условие (iii).

Рассмотрим случай, когда оператор L_i при некотором $i \in I$ невырожден. Обозначим $N(u) = u/||u||$ для всех $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Для любой точки $t \in [0, l_1]$ выполняется

$$g'(t) = \lim_{t' \to t} \frac{g(t') - g(t)}{||g(t') - g(t)||} \cdot \frac{||g(t') - g(t)||}{t' - t} = \lim_{t' \to t} N(g(t') - g(t)) \cdot \operatorname{sign}(t' - t).$$

Отсюда получаем

$$g'(\eta_i(t)) = \lim_{t' \to t} N\big(g \circ \eta_i(t') - g \circ \eta_i(t)\big) \cdot \operatorname{sign}(\eta_i(t') - \eta_i(t)) =$$

$$= \lim_{t' \to t} N\big(S_i \circ g(t') - S_i \circ g(t)\big) \cdot (-1)^{s_i} \cdot \operatorname{sign}(t' - t) =$$

$$= \lim_{t' \to t} N\big(L_i^+ \cdot (g(t') - g(t))\big) \cdot \operatorname{sign}(t' - t) =$$

$$= \lim_{t' \to t} \frac{L_i^+ N(g(t') - g(t))}{||L_i^+ N(g(t') - g(t))||} \cdot \operatorname{sign}(t' - t) = \frac{L_i^+ g'(t)}{||L_i^+ g'(t)||}.$$

Т.е. $g'(\eta_i(t)) \uparrow\uparrow L_i^+ g'(t)$. Следовательно, для любого $i \in I$ имеем

$$L_i \gamma_0 = L_i^+ g'(l(t_0)) \uparrow\uparrow g'(\eta_i \circ l(t_0)) = g'(l \circ T_i(t_0)) = g' \circ l(t_{i+s_i}) = \gamma_{t_{i+s_i}}.$$

Аналогично получаем $L_i \gamma_n \uparrow\uparrow \gamma_{t_{i+1-s_i}}$, что доказывает условие (iii) теоремы для невырожденных операторов L_i.

Выберем произвольное слово $i = i_1 i_2 \ldots \in I^\infty$. Из $\operatorname{diam} T_i^k(J) \to 0$ при $k \to \infty$ следует, что $\operatorname{diam} H_{i|_k} = l \circ T_i^k(J) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как производная $g'(t)$ непрерывна, то при $k \to \infty$ имеем

$$\theta(U_{i|_k}) = \theta(\operatorname{cone} g'(H_{i|_k})) \to 0. \tag{2.22}$$

Применяя теорему 1.1 к набору операторов $\{L_1^+, \ldots, L_n^+\}$ и конусу U, получаем, что выполняется условие (iv) настоящей теоремы.

Наконец покажем, что конус U — острый. Если все операторы $L_1, \ldots, L_n$ вырождены, то аттрактор циппера $\mathbf{S}$ является отрезком, и конус U является лучом, и, следовательно, он острый. Если при некотором $j \in I$ оператор L_j невырожден, обозначим $i = j(j) \in I^\infty$. Из (2.22) следует, что $\theta(U_{i|_k}) < \pi$ при некотором $k \in \mathbb{N}$. Так как оператор $L_{i|_k} = L_j^k$ невырожден и конус $U_{i|_k}$ — острый, то, следовательно, конус $U = L_{i|_k}^{-1} U_{i|_k}$ тоже острый. Первая часть теоремы доказана.

Пусть циппер $\mathbf{S}$ удовлетворяет условиям (i)-(iv) с острым замкнутым конусом U, докажем, что циппер $\mathbf{S}$ — гладкий. По лемме 2.2 аттрактор K является спрямляемой жордановой кривой. Пусть $l(t)$ — длина дуги кривой $f([0, t])$, $l_1 = l(1)$, и пусть $g : [0, l_1] \to K$ — естественная параметризация, эквивалентная f, т.е. $f = g \circ l$. Обозначим $J_i = T_i(J)$ и $U_i = L_i^+ U$ для всех $i \in I^*$. Для всех $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$\theta_k = \max\{\theta(U_i) : \ i \in I^k\}.$$

Заметим, что $\theta_k \to 0$ при $k \to \infty$. Иначе бы нашлось слово $i \in I^\infty$, такое что $\lim_{k\to\infty} \theta(U_{i|_k}) > 0$, что по теореме 1.1 противоречит условию (iv).

Определим множество $\Sigma_U = \{u \in U : ||u|| = 1\}$. Для любых ненулевых векторов $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ обозначим $\rho_\Sigma(v_1, v_2) = v_1\hat{}v_2$. Функция ρ_Σ являтся метрикой на единичной окружности в $\mathbb{R}^2$ и на множестве Σ_U.

Определим набор отображений $\sigma_i : \Sigma_U \to \Sigma_U$ для $i \in I$ следующим образом. Для каждого невырожденного оператора L_i $(i \in I)$, положим

$$\sigma_i(v) = \frac{L_i v}{||L_i v||}. \tag{2.23}$$

Если при некотором $i \in I$ оператор L_i вырожден, то в силу невырожденности циппера **S** имеем $L_i \neq 0$ и $\mathrm{Nv}(L_i, U) = 1$. Таким образом, найдётся единственный собственный вектор $v_i \in \Sigma_U$ оператора L_i. Для данного i положим $\sigma_i(v) = v_i$ для всех $v \in \Sigma_U$. Заметим, что при таком определении σ_i, равенство (2.23) выполняется для всех векторов $v \in \Sigma_U \setminus \ker L_i$.

Для всех $i \in I^*$ справедливо включение $\sigma_i(\Sigma_U) \subset U_i$.

Без ограничения общности будем считать, что векторы $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из условия (iii) являются единичными, т.е. $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Sigma_U$. Определим пространство непрерывных функций

$$\mathcal{F} = \{h \in C(J, \Sigma_U) : h(0) = \gamma_0, h(1) = \gamma_n\}$$

с заданной на нём метрикой

$$\rho_\mathcal{F}(h_1, h_2) = \sup\{\rho_\Sigma(h_1(t), (h_2(t)) : \ t \in J\}.$$

Для любой функции $h \in \mathcal{F}$, любого $i \in I$ и $t \in J_i = [t_{i-1}, t_i]$ положим

$$\mathcal{P}(h)(t) = \sigma_i \circ h \circ T_i^{-1}(t). \tag{2.24}$$

Если $t \in J_i \cap J_j$ для двух различных слов $i, j \in I$, $i < j$, то $j = i + 1$, $t = t_i$ и из условия (iii) следует

$$\sigma_i \circ h \circ T_i^{-1}(t) = \sigma_j \circ h \circ T_j^{-1}(t).$$

Таким образом, формула (2.24) корректно задаёт отображение $\mathcal{P}$ на множестве $\mathcal{F}$. Т.к. функция $\mathcal{P}(h)$ непрерывна на каждом из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$ $(i \in I)$, то она непрерывна на всём отрезке J.

Суперпозицию $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ \cdots \circ \mathcal{P}$ длины k будем обозначать $\mathcal{P}^k$. Из (2.24) вытекает, что для любых $k \in \mathbb{N}$, $i \in I^k$, $t \in J_i$ выполняется равенство

$$\mathcal{P}^k(h)(t) = \sigma_i \circ h \circ T_i^{-1}(t),$$

и, следовательно, $\mathcal{P}^k(h)(t) \in U_i$. Для любых натуральных $k < k'$, $i \in I^k$, $t \in J_i$ имеем

$$\rho_\Sigma(\mathcal{P}^k(h)(t), \mathcal{P}^{k'}(h)(t)) \leqslant \theta(U_i) \leqslant \theta_k.$$

Переходя к супремуму по $t \in J$, получаем $\rho_\mathcal{F}(\mathcal{P}^k(h), \mathcal{P}^{k'}(h)) \leqslant \theta_k$. Следовательно, последовательность $\{\mathcal{P}^k(h)\}$ фундаменальна и сходится к некоторому пределу $h^* \in \mathcal{F}$. Причём, по построению для любого слова $i \in I^\infty$ и $t = \pi_T(i)$ выполняется

$$h^*(t) \in \cap_{k \in \mathbb{N}}(U_{i|_k} \cap \Sigma_U). \tag{2.25}$$

Последовательность вложенных компактов $\{U_{i|_k} \cap \Sigma_U\}$ имеет диаметры в метрике ρ_Σ, ограниченные сверху убывающей к нулю числовой последовательностью $\{\theta_k\}$, и, следовательно, содержит в пересечении одну единственную точку $h^*(\pi_T(i))$. Таким образом, функция h^* как предел последовательности $\{\mathcal{P}^k(h)\}$ не зависит от выбора функции $h \in \mathcal{F}$.

Выберем произвольную точку $t \in J$. Для $k = 2, 3, \dots$ обозначим

$$\delta_k = \delta_k(t) = \inf\{|t - t'| : \ i \in I^k, t \notin J_i, t' \in J_i\}.$$

Так как точка t содержится не более чем в двух отрезках J_i для $i \in I^k$, то множество $\{i \in I^k : \ t \notin J_i\}$ не пусто и $\delta_k > 0$. Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Найдётся $k \in \mathbb{N}$, такое что $\theta_k < \varepsilon$. Для любого $t' \in J$ такого, что $t' \neq t$ и $|t' - t| < \delta_k$, найдётся отрезок J_i $(i \in I^k)$, содержащий точки t и t' одновременно. Обозначим $\xi = T_i^{-1}(t)$, $\xi' = T_i^{-1}(t')$, тогда $\xi, \xi' \in J$ и

$$f(t) - f(t') = f \circ T_i(\xi) - f \circ T_i(\xi') =$$
$$= S_i \circ f(\xi) - S_i \circ f(\xi') = L_i(f(\xi) - f(\xi')).$$

По лемме 2.2 $(f(\xi) - f(\xi')) \cdot \mathrm{sign}\,(\xi - \xi') \in U$. Учитывая, что

$$\mathrm{sign}\,(l(t) - l(t')) = \mathrm{sign}\,(t - t') = \mathrm{sign}\,(T_i(\xi) - T_i(\xi')) = (-1)^{s_i} \cdot \mathrm{sign}\,(\xi - \xi'),$$

получаем

$$\frac{f(t) - f(t')}{\mathrm{sign}\,(l(t) - l(t'))} = L_i^+ \frac{f(\xi) - f(\xi')}{\mathrm{sign}\,(\xi - \xi')} \in L_i^+ U = U_i.$$

Обозначим $v(t') = \frac{f(t) - f(t')}{l(t) - l(t')} \in U_i$. Из (2.25) и $t \in J_i$ имеем $h^*(t) \in U_i$, откуда следует оценка для угла

$$v(t')\hat{\ }h^*(t) \leqslant \theta(U_i) \leqslant \theta_k < \varepsilon.$$

Применив лемму 2.3 к параметризации f на отрезке J_i, получим, что

$$\cos(\theta(U_i)/2) \leqslant \left\| \frac{f(t) - f(t')}{l(t) - l(t')} \right\| \leqslant 1.$$

Отсюда получаем неравенство $\cos(\theta_k/2) \leqslant ||v(t')|| \leqslant 1$. В силу произвольности выбора ε это значит, что $||v(t')|| \to 1 = ||h^*(t)||$ и $v(t')\hat{\ }h^*(t) \to 0$ при $t' \to t$. Следовательно,

$$\lim_{t' \to t} \frac{f(t) - f(t')}{l(t) - l(t')} = h^*(t).$$

Произведя замену $t = l^{-1}(\tau)$, $t' = l^{-1}(\tau')$, получим тождество

$$g'(\tau) = \lim_{\tau' \to \tau} \frac{g(\tau) - g(\tau')}{\tau - \tau'} = h^*(l^{-1}(\tau)).$$

Таким образом, производная $g'(\tau)$ существует и непрерывна на всём отрезке $[0, l_1]$. Следовательно, циппер $\mathbf{S}$ — гладкий. $\square$

3. Примеры.

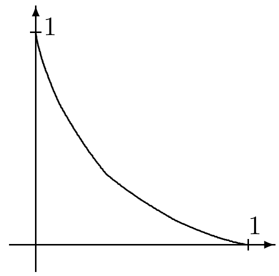

Рис. 1:

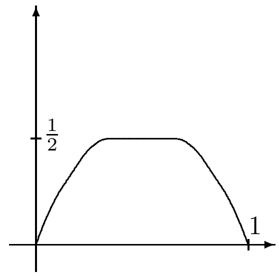

Рис. 2:

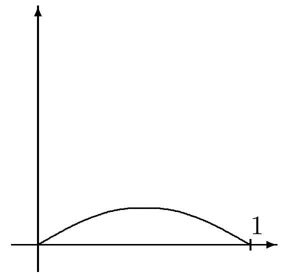

Рис. 3:

Пример 3.1 Рассмотрим систему сжимающих отображений $\mathbf{S} = \{S_1, S_2\}$ вида $S_i(x) = A_i(x - o_i) + o_i$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, o_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, o_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система $\mathbf{S}$ является циппером с вершинами $x_0 = o_1$, $x_1 = S_1(o_2) = S_2(o_1)$, $x_2 = o_2$ и сигнатурой $(0, 0)$. Циппер $\mathbf{S}$ удовлетворяет теореме 2.5 с конусом $U = \{(x, y)^{\mathrm{T}} : x \geqslant 0,\ y \leqslant 0\}$ и векторами $\gamma_0 = (0, -1)^{\mathrm{T}}$, $\gamma_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^{\mathrm{T}}$, $\gamma_2 = (1, 0)^{\mathrm{T}}$. Следовательно, аттрактор циппера $\mathbf{S}$ является гладкой кривой (см. рис. 1).

Заметим, что матрицы A_1, A_2 выбраны так, что имеют всего по одному собственному вектору.

Пример 3.2 Три отображения $S_i(x) = A_i(x - o_i) + o_i$, $i = 1, 2, 3$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},$$

$$\text{и } o_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, o_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, o_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

порождают гладкий циппер, с вершинами

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, x_3 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, x_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и сигнатурой $(0, 0, 0)$. Теорема 2.5 выполняется с конусом

$$U = \{(x, y)^{\mathrm{T}} : |y| \leqslant 3x\}$$

и векторами $\gamma_0 = (1, 3)^{\mathrm{T}}, \gamma_1 = \gamma_2 = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \gamma_3 = (1, -3)^{\mathrm{T}}$.

Вырожденное отображение S_2 переводит всю кривую в отрезок. И аттрактор этого циппера содержит счётное число отрезков, лежащих строго над дополнением множества Кантора на отрезке $[0, 1]$ (см. рис. 2).

Пример 3.3 Система сжимающих отображений $\mathbf{S} = \{S_1, S_2\}$ вида $S_i(x) = A_i(x - o_i) + o_i$, $i = 1, 2$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{10} \\ \frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, o_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{10} \\ -\frac{\sqrt{3}}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}, o_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

является циппером с вершинами $x_0 = o_1$, $x_1 = A_1 o_2$, $x_2 = o_2$ и сигнатурой $(0, 0)$. Условия теоремы 2.5 выполняются с конусом

$$U = \{(x, y)^{\mathrm{T}} : x \geqslant \sqrt{3}|y|\}$$

и векторами $\gamma_0 = (\sqrt{3}, 1)^{\mathrm{T}}, \gamma_1 = (1, 0)^{\mathrm{T}}, \gamma_2 = (\sqrt{3}, -1)^{\mathrm{T}}$. Таким образом, аттрактор K системы $\mathbf{S}$ является гладкой кривой.

Обозначим $\mathbf{S}'$ систему, полученную добавлением к $\mathbf{S}$ отображения S_3 с

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, o_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Аттрактор K' системы $\mathbf{S}'$ является симметричным относительно вертикальной оси и поворотов на 120^o треугольником, гомеоморфным треугольнику Серпинского. Причём, аттрактор K' содержит счётное число гладких дуг, являющихся аффинными образами кривой K.

Следующий пример показывает, что существуют также не плоские гладкиеципперы.

Пример 3.4 Система $\mathbf{S} = \{S_1, S_2\}$ сжимающих аффинных отображений гильбертова пространства l_2 на себя, вида:

$$S_1(\xi) = (\frac{1}{2}\xi_1, \frac{1}{4}(\xi_1 + \xi_2), \frac{1}{4}\xi_2, \frac{1}{4}\xi_3, \ldots, \frac{1}{4}\xi_{n-1}, \ldots)$$

$$S_2(\xi) = (\frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{4}(1 - \xi_1 + \xi_2), -\frac{1}{4}\xi_2, \frac{1}{4}\xi_3, \ldots, \frac{1}{4}\xi_{n-1}, \ldots)$$

является циппером с вершинами 0, $(\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{4}e_2)$, e_1 и сигнатурой $(0, 0)$. Проекция аттрактора на плоскость $\xi_1\xi_2$ является дугой параболы $\xi_2 = \xi_1(1 - \xi_1)$, $\xi_1 \in [0, 1]$. Проекция на плоскость $\xi_1\xi_n$ $(n \geqslant 3)$ является гладкой кривой, составленной из 2^n дуг парабол с совпадающими в точках стыка производными слева и справа:

$$\xi_n = (-1)^{[2^n\xi_1]}(\xi_1 - \frac{[2^n\xi_1]}{2^n})(\frac{[2^n\xi_1] + 1}{2^n} - \xi_1), \ \xi_1 \in [0, 1].$$

Заметим, что аттрактор данного циппера не может быть изоморфно вложен ни в какое конечномерное линейное пространство (т.е. является существенно бесконечномерным), так как множество векторов его хорд содержит счётное число линейно независимых векторов: $S_1(e_1), S_1 \circ S_1(e_1), \ldots$

Список литературы

[1] Асеев В. В., Тетенов А. В., Кравченко А. С., *О самоподобных жордановых кривых на плоскости.* — Сиб.Мат.Журнал Новосибирск: ИМ СО РАН, 2003, Том. 44, №3, 481-492.

[2] Гантмахер Ф. Р., *Теория матриц.* — М.:Наука,1988, 548 с.

[3] Кравченко А. С., *Гладкие самоаффинные кривые.* — Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы ВЗМШ. — Воронеж: ВГУ, 2005, стр. 127

[4] Astala K., *Selfsimilar zippers*, Holomorphic functions and moduli: Proc. Workshop, March 13-19, 1986, New York etc., 1988, V. 1., p. 61-73.

[5] Bedford T., *Holder Exponents and Box Dimension for Self-Affine Fractal Functions*, Constructive Approximation, 1989

[6] Bedford T., *The Box dimension of self-affine graphs and repellers*, Nonlinearity, No. 2, 1989, 53-71.

[7] Falconer K., *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, — Wiley, Chichester. New York, 1990

[8] Falconer K., *The geometry of fractal sets*, Cambridge [Cambridgeshire]; New York: Cambridge University, 1985

[9] Hutchinson J., *Fractals and Self Similarity*, Indiana Univ. Math. Journal, Vol. 30, No. 5. (1981), 713-747.